Grundpraktikum

M3 Elastizität und Torsion

Julien Kluge

2. Juli 2015

Student: Julien Kluge [redacted]
Partner: [redacted]

Betreuer: Kai Passchier

Raum: 314

Messplatz: 3

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract **1**

2 Versuchsdurchführung/-Erklärung **2**
2.1 Längenausdehnungsmessung 2
2.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls 2

3 Messauswertung/Fehlerberechnung **3**
3.1 Längenausdehnungsmessung 3
3.2 Bestimmung des Torsionsmoduls 4
3.3 Bestimmung der Poissonzahl 4

4 Fehler-/Ergebniseinschätzung **4**
4.1 Längenausdehnungsmessung 4
4.2 Drehschwingungsmessung 6

5 Anlagen **7**

6 Quellen **7**

1 Abstract

Ziel des Versuches war es, mithilfe einer Längenausdehnungsmessung eines Messingdrahts und die Messung der Periodendauer einer Schwingung des Selbigen, das Elastizitätsmodul, Torsionsmodul und die Poissonzahl zu bestimmen. Dabei wurden folgende Werte für Messing berechnet:

- Elastizitätsmodul: $E = (95.2 \pm 0.5)\text{GPa}$ +-6
- Torsionsmodul: $G = (37 \pm 5)\text{GPa}$
- Poissonzahl: $\mu = 0.30$

Unsicherheit?

2 Versuchsdurchführung/-Erklärung

2.1 Längenausdehnungsmessung

Ein aufgehängter Messingdraht der bekannten Länge l wird mit Gewichten m_i bekannter Masse belastet. Die daraufhin entstehende Ausdehnung des Drahtes Δl erfolgte über eine angebrachte, aufliegende Brücke an dessen anderer Seite eine Messschraube angebracht war. So konnte durch Austarieren der Brücke die Ausdehnung des Drahts an der Schraube abgelesen werden. Die Gewichte wurden in 50g Schritten auf maximal 800g erhöht. Eine weitere Messreihe wurde beim Abnehmen der Gewichte durchgeführt um beide Seiten der Hysterese-Kurve zu messen und darüber mitteln zu können. Die nun ermittelten Messwerte können in einer graphischen Visualisierung nach $\Delta l = f(m)$ dargestellt werden. Es gilt dafür folgender Zusammenhang:

Quelle fehlt

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{l}{A} g \cdot m \tag{1}$$

(g: Erdbeschleunigung - A: belastete Querschnittfläche - E: Elastizitätsmodul)
Nach diesem Zusammenhang kann nun bei bekannter Querschnittfläche, Länge und Erdbeschleunigung regressiert werden um das Elastizitätsmodul zu bestimmen.

2.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Der Messingdraht wird nun mit einem zylinderförmigen Gewicht belastet und um seine Aufhängungsachse mit den Winkel ϕ ausgelenkt. Durch die nun auftretende Spannung im Messing entsteht eine rückstellende Kraft die vom Torsionsmodul abhängig ist und ein Drehmoment M ausübt. Somit ergibt sich eine Drehschwingung welche nach der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} J\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi &= \sum M \\ &= D\phi \end{aligned}$$

Herleitung nicht nötig

abläuft. Stellt man nun die Kreisfrequenz ω_0^2 in der Gleichung her und nutzt die Relation $T = 2\pi\omega_0$ bekommt man die Formel für die Periodendauer T:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{J_v + J_S}{D}} \end{aligned}$$

Löst man nun die Trägheitsmomente auf und setzt in eine Relation $G = f(l, R, J, T)$ ein erhält man die endgültige Formel für das Torsionsmodul:

$$G = \frac{4\pi \cdot l}{R^4} \cdot \frac{m \cdot r^2}{T_S^2 - T_V^2} \tag{2}$$

(R: Radius des Drahts - m: Masse der Zusatzscheibe - r: Radius der Zusatzscheibe - T_S, T_V: Periodendauern bei unterschiedlichen Belastungen mit $T_S > T_V$)
Für zwei Schwingungsmessungen mit unterschiedlichen Belastungen ist es damit möglich, das Torsionsmodul zu bestimmen.

3 Messauswertung/Fehlerberechnung

3.1 Längenausdehnungsmessung

Die Unsicherheiten der Messung von l_i wurden abgeschätzt mit dem Messfehler der Messschraube $\pm(0.005\text{mm} + 10^{-5} \cdot \bar{l})$, dem Ablesefehler mit einem halben Skalenteil ± 0.005mm und dem Ablesefehler der auftritt, wenn man die Libelle ausbalancieren will. Die letzte Unsicherheit wurde so abgeschätzt das mit höchstmöglicher Präzision die Libelle an einen und später an einen daneben liegenden Skalenteil gebracht wurde und der Unterschied an der Messschraube als Ablesefehler an der Libelle interpretiert wurde. Er belief sich auf circa ± 0.02mm. Die aufgenommenen Werte l_i werden nun mit ihrer Nulleinstellung (keine Belastung durch Gewichte) subtrahiert. Die Fehler werden mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet und ergeben sich damit zu

$$u(\Delta l_i) = \sqrt{u(l_0)^2 + u(l_i)^2}$$

Mittelt man nun beide Werte für eine Belastung und trägt diese in ein Diagramm mit $\Delta l = f(m)$ ein, ergibt sich folgende Grafik:

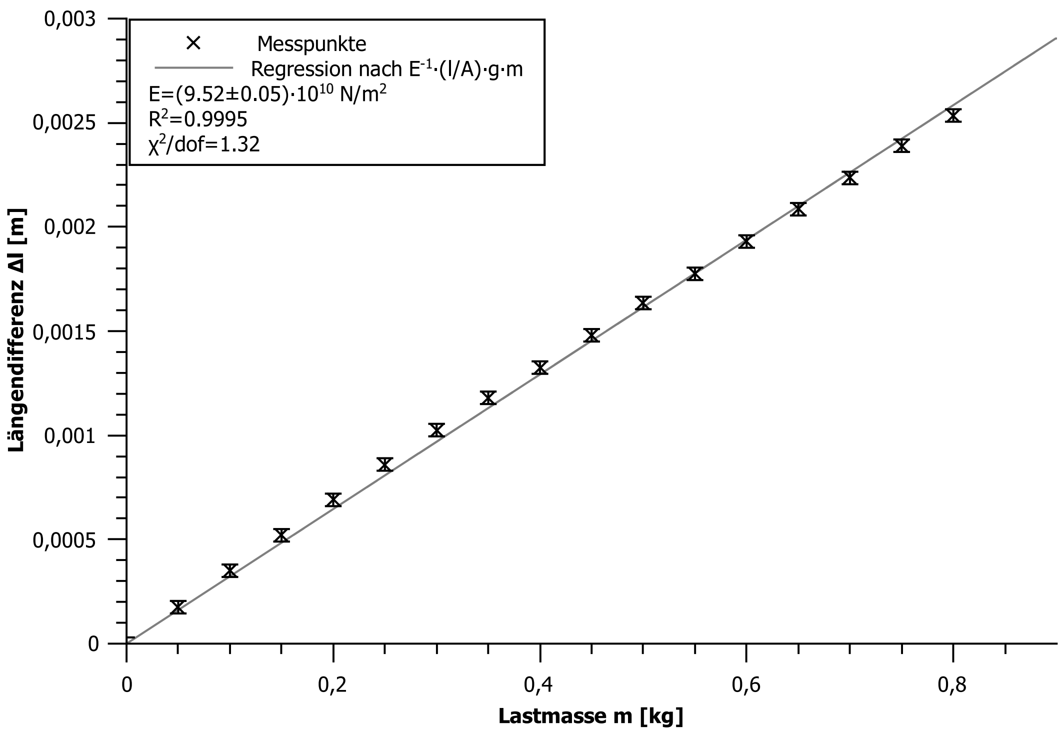


Abbildung 1: Abhängigkeit der Längenausdehnung Δl zur Belastung mit dem Gewicht m. Lineare Regression nach Relation (1).

Aus der Regression nach Relation (1) ergibt sich das Elastizitätsmodul mit

$$\begin{aligned} E &= (9.52 \pm 0.05) 10^{10} \text{kN}/\text{mm}^2 \\ &= (95.2 \pm 0.5)\text{GPa} \end{aligned}$$

+-6

3.2 Bestimmung des Torsionsmoduls

Um das Torsionsmodul G zu bestimmen wurden die Periodendauern aus 30 bzw. zehn Schwingungen (unterschiedliche Belastungen) gemessen. Die Unsicherheiten der Zeit wurden allein über die Messunsicherheit der Uhr ($\pm(0.01+10-4\cdot\overline{T})$s) abgeschätzt. Es ergaben sich folgende Schwingungsdauern:

- $30 \cdot T_V = (2.88 \pm 0.03)$s
- $10 \cdot T_S = (11.4 \pm 0.1)$s

(Hinweis: es wurde mit ungerundeten Ergebnissen weiter gerechnet) Das Torsionsmodul kann nun nach Formel (2) bestimmt werden. Die Fehler wurden über Gaußsche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$G = \sqrt{\frac{256\pi^2 L^2 r^2 m^4 u_R^2}{R^{10}\left(T_S^2 - T_V^2\right)^2} + \frac{64\pi^2 L^2 r^2 m^4 T_V^2 u(T_V)^2}{R^8\left(T_S^2 - T_V^2\right)^4} + \frac{64\pi^2 L^2 r^2 m^4 T_S^2 u(T_S)^2}{R^8\left(T_S^2 - T_V^2\right)^4}}$$
$$\overline{+\frac{64\pi^2 L^2 r^2 m^2 u_r^2}{R^8\left(T_S^2 - T_V^2\right)^2} + \frac{16\pi^2 L^2 R^4 u_m^2}{R^8\left(T_S^2 - T_V^2\right)^2} + \frac{16\pi^2 r^2 m^4 u_L^2}{R^8\left(T_S^2 - T_V^2\right)^2}}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} G &= (3.7 \pm 0.5) \cdot 10^{10} \mathrm{kN}/\mathrm{mm}^2 \\ &= (37 \pm 5)\mathrm{GPa} \end{aligned}$$

3.3 Bestimmung der Poissonzahl

Es gilt der Zusammenhang

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich

$$\mu \approx 0.3 \tag{3}$$

Der Wert ist nicht mit Unsicherheit gegeben, da das Elastizitätsmodul E und das Torsionsmodul G miteinander korreliert sind und der Korrelationsterm unbekannt ist. Deswegen kann keine Unsicherheit bestimmt werden. mit Fehlerfortpflanzung abschätzen

4 Fehler-/Ergebniseinschätzung

4.1 Längenausdehnungsmessung

Ergebnisse nochmal aufführen

Vergleicht man das Ergebnis mit dem Literaturwert ($G = [78 - 123]$GPa)[1] stellt man fest, dass der ermittelte Wert in dem angegebenen Intervall liegt. Eine genaue Aussage über die Qualität des Wertes kann nicht getroffen werden, da Messing eine Legierung aus Kupfer und Zink ist und demnach das Elastizitätsmodul je nach Zinkanteil unterschiedlich ausfallen kann (daher auch ein Intervall als Literaturwert).
Zwei zwar beachtete, aus Zeitgründen aber nicht sauber ausgeführte Punkte, die eine Unsicherheit mit eingebracht haben, waren die Einfindungszeit des Drahtes selbst als auch

[1] http://www.peter-brehm.de/219.0.html

Datum, Uhrzeit --> Quellenverzeichnis

die, der Libelle. Aufgrund vieler zu machender Messungen, wurde keine sonderlich lange Zeit abgewartet bis die Libelle sich wirklich stationär eingefunden hat, als auch dass der Draht tatsächlich genug Zeit hatte sich auszudehnen (auch wenn das nahezu instantan erfolgen sollte). Etwas das in diesem Zusammenhang recht schnell auffällt, wenn man sich Abb. 1 anguckt, ist die scheinbar systematische Verteilung der Punkte über und unter der Kurve. Eine genauere Visualisierung erhält man bei Betrachtung der Residuen:

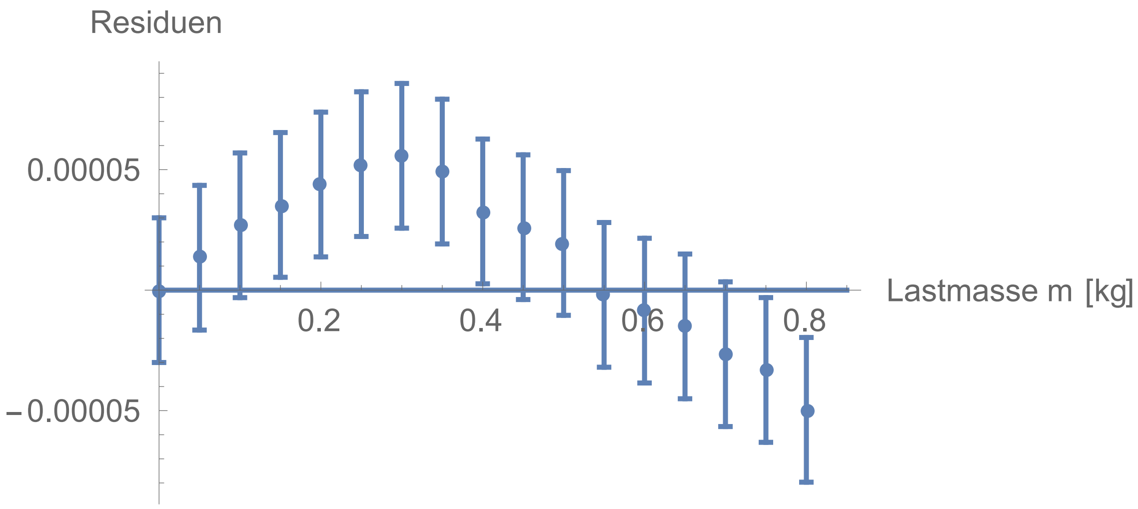


Abbildung 2: Visaulisierung der Residuen der Regression von Abb. 1

Man könnte vermuten, dass durch stark einseitige Belastung ein Teil der Hysterese-Kurve zu sehen ist. Das ist jedoch aufgrund fehlender Messgenauigkeit nur spekulativ (ebenfalls unwahrscheinlich da extra eine Rückmessung vorgenommen wurde um diesen Effekt zu kompensieren). Nichts desto trotz lässt sich eine systematische Abweichung erkennen die irgendwo ihren Ursprung haben muss.
Auch wenn Messing sich bei genügend kleiner Belastung vollkommen elastisch verformen sollte, geht in der Realität ein Anteil in (zumindest temporäre) plastische Verformung über. Das könnte ebenfalls eine Erklärung für die scheinbare systematische Abweichung sein.
Leider war ich nicht selbst während dieser Messungen zugegen, da ich sonst dazu mehr sagen könnte und evtl. noch ein paar Worte zur Gewichtsverteilung verlieren könnte.
Durch Zufall konnte ebenfalls eine andere Möglichkeit der Unsicherheit aufgedeckt werden. Bei unserer Gruppe ist der Draht an Messplatz zwei gerissen (*wodurch wir die Messwerte der Gruppe an Messplatz drei bekamen*). Als man sich nun den Draht ansah, hat man deutlich gesehen das sich dieser spiralförmig zusammengedreht hatte (auf eine Weise die nicht von Memory-Effekten stammen kann die zum Beispiel durch vorherige Abrollung an einer Kabelrolle entstehen können). Das ist ein deutliches Zeichen von plastischer Verformung am Draht und zeigt auch auf, dass sich dieser über die Zeit dahingehend verlängert haben könnte wodurch er ebenfalls dünner gewesen sein muss als angegeben. Das alles führt zu einem zu kleinen Wert für das Elastizitätsmodul. Der dominante Fehler in dieser Messung war die durch die Messschraube abgeschätzte Ableseungenauigkeit.

und für E allgemein

4.2 Drehschwingungsmessung

Fehlerbereich

Der errechnete Wert für das Torsionsmodul trifft den Literaturwert ($G \approx 37\text{GPa}$)[2] genau. Dazu muss aber gesagt werden das sie unpräzise sind also einen großen Bereich der Unsicherheit haben. Hier gilt ebenfalls das gleiche Argument der Materialermüdung wie aus der Längenausdehnungsmessung. Hier gilt im Gegensatz zur ersten Messung, dass es im Raum einen Temperaturanstieg von $\Delta T \approx 0.5\text{K}$ gab. Das ist genug um den Draht in der Länge um etwa 2cm zu verlängern[3]. Auch wenn es unwahrscheinlich ist, dass der Draht diesen Temperaturunterschied komplett mitgemacht hat, könnte er sich trotzdem um wenige Millimeter verlängert haben und so zu einem zu großen Torsionsmodul geführt haben. Ein bekannter aber nicht korrigierbarer Fehler, ist ein Ausreißer bei den Messungen mit zusätzlichem Gewicht der aber deshalb nicht aus der Messreihe gestrichen werden kann, da sonst unter sechs Messwerte existieren und keine statistische Auswertung mehr vorgenommen werden darf.

Ableseungenauigkeit, Reaktionszeit

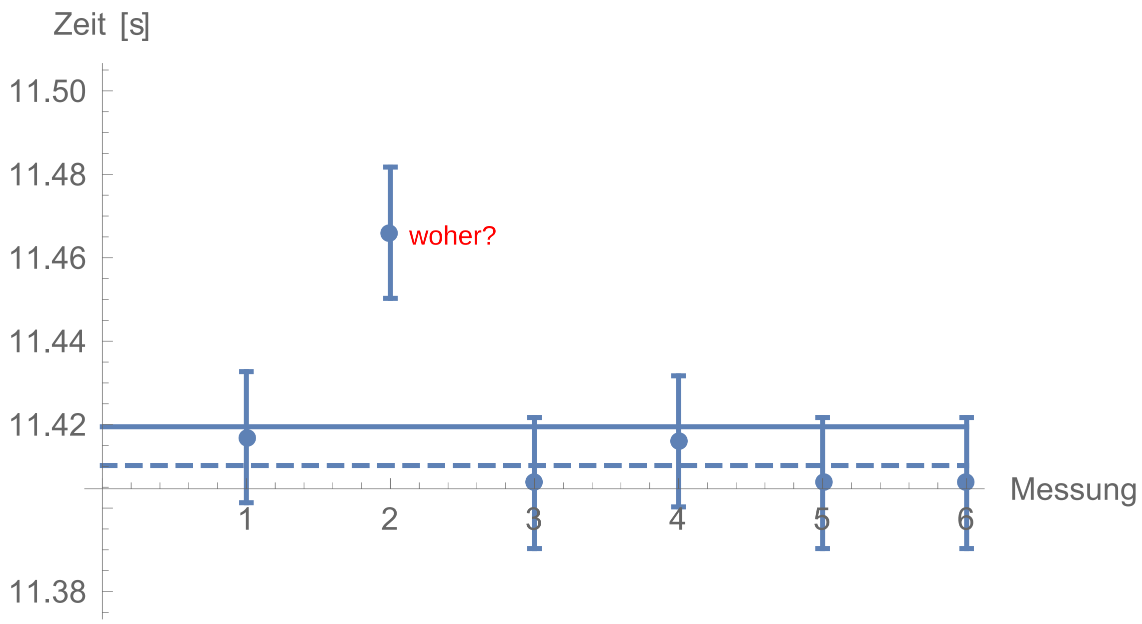
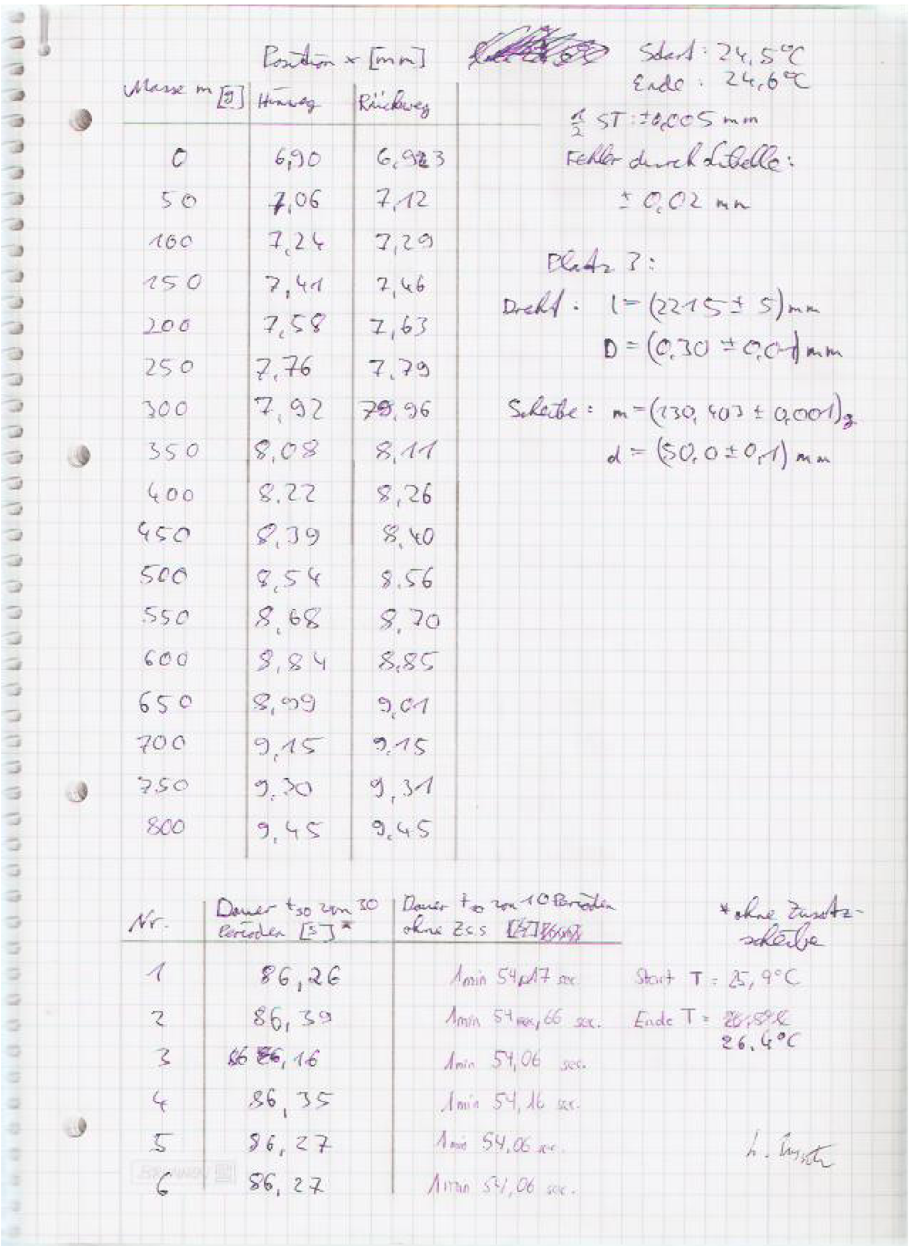


Abbildung 3: durchgezogene Linie: Mittelwert - gestrichelte Linie: Mittelwert ohne den zweiten Messwert

Es ist klar zu sehen, dass der Mittelwert deutlich besser zu den Werten passen würde, wenn die zweite Messung eliminiert werden würde. Betrachtet man die Glieder der Formel für die Unsicherheiten einzeln, fällt überraschenderweise auf, dass der Radius R des Drahtes den größten Fehler erzeugt. Analog zu der Diskussion oben für eine fehlerhafte Drahtdicke erklärt dies, warum die Unsicherheiten beim Torsionsmodul so groß sind. Verkleinert man die Unsicherheit des Drahtes um eine Stelle (10^{-1}), dann ergibt sich dass der Fehler der Zeitmessung plötzlich dominanter ist (circa um das zweifache).
Wenn man demnach das Experiment verbessern möchte, gilt es die Drahtdicke genauer zu messen und genauere Uhren mit Lichtschranken verwenden.

[2] http://utzipedia.de/messing.htm
[3] www.muepro.de/service/berechnungsprogramme/laengenausdehnung.html
wie oben

5 Anlagen



Masse m [g]	Position x [mm] Hinweg	Rückweg
0	6,90	6,93
50	7,06	7,12
100	7,24	7,29
150	7,41	7,46
200	7,58	7,63
250	7,76	7,79
300	7,92	7,96
350	8,08	8,11
400	8,22	8,26
450	8,39	8,40
500	8,54	8,56
550	8,68	8,70
600	8,84	8,85
650	8,99	9,01
700	9,15	9,15
750	9,30	9,31
800	9,45	9,45

Start: 24,5°C
Ende: 24,6°C

$\frac{1}{2}$ ST: ±0,005 mm
Fehler durch Libelle:
± 0,02 mm

Platz 3:
Draht: $l = (2215 \pm 5)$ mm
$D = (0{,}30 \pm 0{,}01)$ mm

Scheibe: $m = (130{,}403 \pm 0{,}001)$ g
$d = (50{,}0 \pm 0{,}1)$ mm

Nr.	Dauer t_{30} von 30 Perioden [s]*	Dauer t_{10} von 10 Perioden ohne Z.S. [s]
1	86,26	1 min 54,17 sec.
2	86,39	1 min 54,66 sec.
3	86,16	1 min 54,06 sec.
4	86,35	1 min 54,16 sec.
5	86,27	1 min 54,06 sec.
6	86,27	1 min 54,06 sec.

*ohne Zusatzscheibe

Start T = 25,9°C
Ende T = ~~26,5°C~~ 26,4°C

6 Quellen

1. Script zum Grundpraktikum *(Formeln, Versuchsbeschreibung)*
2. Peter-Brehm *(Elastizitätsmodul für Messing)*
   `http://www.peter-brehm.de/219.0.html`
3. Messing Edelsteinlexikon *(Torsionsmodul für Messing)*
   `http://utzipedia.de/messing.htm`